周期軌道の安定性とマスロフ指数に関する最近の話題(「有限量子多体系の励起構造と相関効果」-原子核・量子ドット・ボース凝縮・クラスターを中心として-,研究会報告)

AUTHOR(S):

杉田, 歩

周期軌道の安定性とマスロフ指数に関する最近の話題

杉田 歩 (阪大RCNP)

Gutzwillerのトレース公式は、非可積分系において古典系のダイナミクスと量子系のスペクトルを結び付けるほとんど唯一の道具として、近年盛んに研究されているが、原論文における導出は決して分かりやすいものではない。この講演では、トレース公式の構造が明確に見えるような、正準不変性を重視した新しい定式化の試みについて話した。特に、オリジナルの導出では意味のわかりにくいマスロフ指数をどう捉えるか、というのが中心になるテーマである。

まず、出発点として分配関数を相空間上で経路積分表示したものをとる:

$$Z(T) = \int \mathcal{D}\boldsymbol{p}\mathcal{D}\boldsymbol{q} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\oint(\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt)\right]. \tag{1}$$

準位密度は、分配関数の Fourier-Laplace 変換から得られる:

$$\rho(E) = \sum_i \delta(E - E_i) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\, g(E + i\epsilon), \tag{2}$$

$$g(E) \;\; = \;\; \frac{1}{i\hbar}\int_0^\infty dT e^{iET/\hbar} Z(T). \tag{3}$$

この量を半古典近似(停留位相近似)で評価すれば、トレース公式が得られる。

分配関数(1)の停留位相位相条件は、ハミルトンの運動方程式になり、また、周期境界条件がついているので、停留解は古典周期軌道になり、分配関数は周期軌道に関する和の形にかける。

$$Z(T) = \sum_{p.o} K \exp\left[\frac{i}{\hbar}R\right]. \tag{4}$$

ここで、$R = \oint \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt$ は作用関数、また、K は古典解のまわりの2次の経路積分の寄与である。

$$K = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x} \exp[i\delta^2 R[\boldsymbol{x}(t)]], \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}(\delta\boldsymbol{q}, \delta\boldsymbol{q}). \tag{6}$$

これは一種の Gauss-Fresnel 積分であるから、位相因子は2次形式 $\delta^2 R$ を対角化したときの、対角要素の符号から決まる。もし正の対角要素と負の対角要素が同数あれば、位相因子は互いにキャンセルして現れないが、数がずれていれば、その分位相がずれる。これがマスロフ指数である。きちんと書けば、

$$\mu = \frac{\mu_- - \mu_+}{2}, \tag{7}$$

ここで、μ はマスロフ指数、μ_+ (μ_-) は正(負)の固有値の数である。

この経路積分を、より幾何学的に見てみよう。周期軌道からのずれを表わすベクトルの集合 $\{\boldsymbol{x}(t)\}$ は、一種のファイバーバンドルとみなすことができ、ハミルトニアンが定める流れが、自然にその上の接続を定義する。(図1) 実際、経路積分 (5) はゲージ理論の形

$$K = \int \mathcal{D}\boldsymbol{x} \exp\left[\frac{i}{2}\boldsymbol{x}^T \not{D}\, \boldsymbol{x}\right]. \tag{8}$$

に書ける。ここで、

$$\not{D} = JD, \tag{9}$$

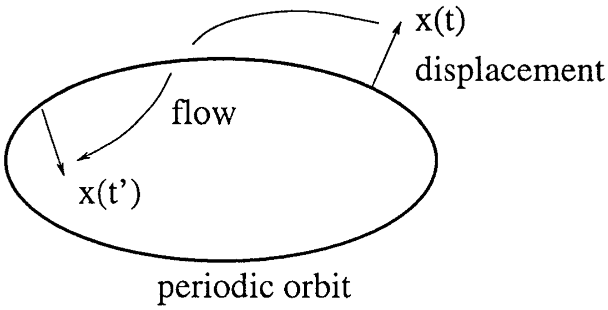

図 1: 周期軌道のまわりの構造。周期軌道からのずれを表わすベクトル全体はファイバーバンドルを成し、ハミルトニアンが定める流れが接続を定める。

D は共変微分

$$D = \frac{d}{dt} + A(t) = \frac{d}{dt} + JH''(t), \tag{10}$$

J はシンプレクティック内積を定める行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

である。

数学的に言えば、このような、S^1 上のファイバーバンドルで、構造群が $Sp(2n,R)$ のものの接続を分類していけばよいのだが、ここで気をつけなければならないのは、実は全てのゲージ変換（今の場合正準変換のこと）に対して経路積分が不変とは限らない、ということである。シンプレクティック群の基本群は

$$\pi_1(Sp(2n,R)) = Z, \tag{12}$$

となって non-trivial なので、ゲージ変換の中にはトポロジー的にねじる（つまり、winding number を変える）ようなものが存在するのだが、そのような変換に対しては、Maslov 指数が変化し、経路積分が符号を変えてしまう場合がある。（これは、場の理論で global anomaly と呼ばれているもの [3] と類似の状況である。）このように、Maslov 指数は、周期軌道のまわりの空間の「ねじれ具合」を反映した量となっている。

以上を一応まとめると、マスロフ指数は、

1. 変分空間における、停留点のまわりの 2 次の展開の符号に関係した量（モース指数の一般化）であり、また、
2. 相空間における、周期軌道のまわりの流れのねじれを表わした量

と見ることができる。このような二つの観点をうまく使うことで、新しい結果を導いたり、これまで知られていた結果をより簡単に再導出したりすることができる。詳しくは、[1]、[2] を見てください。

参考文献

[1] A. Sugita, Phys. Lett. A 266 (2000) 321.

[2] A. Sugita, Ann. Phys. 288 (2001) 277.

[3] E. Witten, Phys. Lett. **B 117** (1982) 324.